

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§2. TÍCH PHÂN (TIẾT 4)

I. ĐỊNH NGHĨA

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

II. TÍNH CHẤT

1. Tính chất 1: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (với k là hằng số).

2. Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

3. Tính chất 3: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$).

III. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

➤ **Công thức:** $\int_a^b [f(u(x))] u'(x) dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$.

➤ **Phương pháp:**

Bước 1: Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

Bước 2: Đổi cận: $\begin{cases} x = b \rightarrow t = u(b) \\ x = a \rightarrow t = u(a) \end{cases}$ (đổi biến phải đổi cận).

Bước 3: Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ đơn giản để tính toán.

IV. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

➤ **Công thức:** $\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$.

hay $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. (2)

➤ **Phương pháp**

Bước 1: Chọn đặt u và dv thích hợp ($u = \log, u =$ đa thức).

Bước 2: Sử dụng công thức tính tích phân từng phần.

Bước 3: Tính tích phân $\int_a^b v du$ đơn giản hơn.

LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 3 trang 113 - SGK: Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

a) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$; b) $I = \int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} dx$.

Lời giải

a) Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $dx = \cos t dt$.

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

b) Đặt $t = 1 + xe^x \Rightarrow dt = (1 + xe^x)' dx \Rightarrow dt = e^x(1+x)dx$.

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=1+e \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^{1+e} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{1+e} = \ln(1+e) - \ln 1 = \ln(1+e).$$

Bài 4 trang 113 – SGK: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, hãy tính:

$$\text{a) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx;$$

$$\text{b) } I = \int_1^e x^2 \ln x dx;$$

$$\text{c) } I = \int_0^1 \ln(1+x) dx;$$

$$\text{d) } I = \int_0^1 (x^2 - 2x - 1)e^{-x} dx.$$

Lời giải

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -(x+1) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}.$$

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = x+1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = (x+1) \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 2 \ln 2 - x \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

$$\text{d) Đặt } \begin{cases} u = x^2 - 2x - 1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x - 2 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Ta có $I = -\left(x^2 - 2x - 1\right)e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 (2x - 2)e^{-x} dx = 2e^{-1} - 1 + \int_0^1 (2x - 2)e^{-x} dx.$

Xét $J = \int_0^1 (2x - 2)e^{-x} dx.$

Đặt $\begin{cases} u' = 2x - 2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x}. \end{cases}$

Ta có $J = -\left(2x - 2\right)e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx = -2 - 2e^{-1}\Big|_0^1 = -2e^{-1}.$

Vậy $I = 2e^{-1} - 1 - 2e^{-1} = -1.$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 2] Cho $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{2e^x + 3} = a + \frac{b \ln 7 + c \ln 10}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}.$

Tính giá trị của $K = 2a + 3b + 4c.$

A. $K = 3.$

B. $K = 7.$

C. $K = 1.$

D. $K = -1.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2e^x + 3 \Rightarrow 2e^x = t - 3 \Rightarrow 2e^x dx = dt.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 5, x = \ln 2 \Rightarrow t = 7.$

Khi đó $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x dx}{2e^x(2e^x + 3)} = \int_5^7 \frac{dt}{(t-3)t} = \frac{1}{3} \int_5^7 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t} \right) dx$
 $= \frac{1}{3} \left[\ln(t-3) - \ln t \right] \Big|_5^7 = \frac{-\ln 7 + \ln 10}{3}.$

Do đó $a = 0, b = -1, c = 1.$

Vậy $K = 2a + 3b + 4c = 1.$

Câu 2: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2.$

Tính $I = \int_0^1 f(x) dx.$

A. $-12.$

B. $8.$

C. $1.$

D. $-8.$

Lời giải

Chọn D

Xét $K = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$

Khi đó $K = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx = (x+1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - I = 2 - I = 10.$

Suy ra $I = -8.$

Câu 3: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

Tính $I = \int_0^1 x f'(2x) dx$.

A. 7.

B. 12.

C. 20.

D. 13.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = \left(\frac{1}{2} x f(2x) \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{4} \int_0^1 f(2x) d(2x) = 8 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt \quad (\text{với } t = 2x)$$

$$= 8 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(x) dx = 7.$$

Câu 4: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(4) = 5$ và $\int_0^2 x^2 f(2x) dx = 10$. Giá

trị của tích phân $\int_0^4 x^3 f'(x) dx$ bằng

A. 80.

B. 70.

C. 60.

D. 90.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } \int_0^2 x^2 f(2x) dx = 10.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^2 x^2 f(2x) dx = \int_0^4 \left(\frac{t}{2} \right)^2 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{8} \int_0^4 t^2 f(t) dt = 10.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^4 t^2 f(t) dt = 80.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^4 x^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = x^3 f(x) \Big|_0^4 - 3 \int_0^4 x^2 f(x) dx = 4^3 f(4) - 3.80 = 64.5 - 3.80 = 80.$$

- Câu 5:** [Mức độ 3] Cho $f(x)$ liên tục thỏa $f(1)=1$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x f'(\sin x) dx$.
- A.** $I = \frac{4}{3}$. **B.** $I = \frac{2}{3}$. **C.** $I = \frac{1}{3}$. **D.** $I = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 2 \sin x \cos x f'(\sin x) dx = 2 \int_0^1 t f'(t) dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=t \\ dv=f'(t)dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=f(t) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = 2 \left(t f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = 2 \left(1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

- Câu 6:** [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 12$ và $2f(1) - f'(1) = -2$.

$$\text{Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.** 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } K = \int_0^1 x^2 f''(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=x^2 \\ dv=f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2x dx \\ v=f'(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } K = x^2 f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2x f'(x) dx = f'(1) - 2 \int_0^1 x f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1=x \\ dv_1=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1=dx \\ v_1=f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 x f'(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } K = f'(1) - 2 \left[f(1) - \int_0^1 f(x) dx \right] = 12 \Leftrightarrow f'(1) - 2f(1) + 2 \int_0^1 f(x) dx = 12.$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \int_0^1 f(x) dx = 12 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 5.$$

A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 14.

Chọn C

Xét $\int_0^1 (x+1)e^x \, dx$.

Khi đó $\int_0^1 (x+1)e^x dx = (x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - e^x \Big|_0^1 = e.$

Suy ra $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{6} + e.$

Vậy $a+b+c=12$.

Câu 1: [Mức độ 1] Cho $\int_{-2}^1 f(x)dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1]dx$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: [Mức độ 2] Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(a-\sqrt{b})$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Lời giải

Chon A

Đổi cân $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$.

Vậy $a = 2b$.

Câu 3: [Mức độ 2] Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$. Tích ab bằng

A. 1.

B. -1.

C. -15.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x \Big|_0^1 = e+1.$$

$$\text{Suy ra } a=1; b=1 \Rightarrow ab=1.$$

Câu 4: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f'(0)f'(2) \neq 0 \text{ và } g(x)f'(x) = x(x-2)e^x. \text{ Tính giá trị của tích phân } I = \int_0^2 f(x)g'(x)dx?$$

A. -4.

B. $e-2$.

C. 4.

D. $2-e$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x)f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0 \text{ (vì } f'(0)f'(2) \neq 0).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = g(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^2 f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x)) \Big|_0^2 - \int_0^2 g(x)f'(x)dx = -\int_0^2 (x^2-2x)e^x dx = 4.$$

Câu 5: [Mức độ 4] Cho $\int_0^1 f(2x+1)dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x dx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x)dx$.

A. 26.

B. 22.

C. 27.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } 2x+1=t \Rightarrow 2dx=dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=3.$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 24.$$

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) 2 \sin x \cos x dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x f(\sin^2 x) d \sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) d \sin^2 x.$$

$$\text{Đặt } \sin^2 x = u.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow u=0; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1.$$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) d\sin^2 x = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = 3.$

Vậy $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 3 + 24 = 27.$

.